1 Grupe

1.1 Teorijski deo

Definicija 1. Neka je $G \neq \emptyset$. Preslikavanje $f : G^2 \to G$ naziva se *binarna operacija.*

Npr. oduzimanje na skupu realnih brojeva je binarna operacija, dok oduzimanje na skupu prirodnih brojeva nije, jer razlika dva prirodna broja nije uvek prirodan broj!

Definicija 2. Neka je na skupu G definisana binarna operacija $*$. Tada se struktura $(G, *)$ naziva *grupoid.*

Grupoid je komutativan akko je odgovarajuća binarna operacija komutativna. Grupoid je asocijativan akko je odgovarajuća binarna operacija asocijativna.

Definicija 3. Asocijativni grupoid se naziva *polugrupa.*

Definicija 4. Neka je $(G, *)$ grupoid. Ako postoji element $e \in G$ takav da za SVAKO $x \in G$ važi

$$x * e = e * x = x,$$

element e se naziva *neutral(jedinica).*

Definicija 5. Neka je $(G, *)$ grupoid sa neutralom e. Element $x \in G$ je *invertibilan* ako postoji $x^{-1} \in G$ takav da je

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$$

U tom slučaju x^{-1} se naziva *inverz.*

Definicija 6. Polugrupa $(G, *)$ sa neutralom e, u kojoj je svaki element invertibilan, se naziva *grupa.* Ako je operacija $*$ komutativna, $(G, *)$ je *Abelova grupa.*

Definicija 7. Neka su $(G, *)$ i $(H, \circ)$ grupoidi. Preslikavanje $f : G \to H$ je *homomorfizam* grupoida $(G, *)$ u grupoid $(H, \circ)$ akko

$$(\forall x, y \in G) \;\; f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Specijalno, ako je f bijekcija, naziva se *izomorfizam.*

Definicija 8. Algebarska struktura $(H, *)$ je podgrupa grupe $(G, *)$ akko je

(i) $H \subset G$;

(ii) $(\forall x, y \in H) x * y^{-1} \in H$.

1.2 Zadaci

1. Ispitati da li je struktura $(\mathbb{Z}, *)$ grupa, ako je operacija $*$ definisana na sledeći način:

   $$(\forall x, y \in \mathbb{Z}) \;\; x * y = x + y + 1.$$

   Ako jeste grupa, da li je Abelova?

2. Dokazati da je skup racionalnih brojeva

   $$S = \left\{ \frac{1 + 2m}{1 + 2n} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

   grupa u odnosu na operaciju množenja realnih brojeva.

3. Da li je struktura $(A, \cdot)$ grupa, ako je

   a) $A = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$;

   b) $A = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}, \;\; x^2 + y^2 \neq 0\}$?

4. Neka je $G = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ i operacija $*$ definisana na sledeći način:

   $$\Big(\forall (a, b), (c, d) \in G\Big) \;\; (a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d).$$

   Dokazati da je struktura $(G, *)$ grupa.

5. Dokazati da je skup realnih funkcija $G = \{f_{a,b}(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ grupa u odnosu na operaciju kompozicija preslikavanja.

6. Ako je $a * a = e$, gde je e neutral grupe $(G, *)$, za svaki element a iz grupe $(G, *)$, dokazatu da je ta grupa Abelova.

7. Skup svih elemenata grupe G koji komutiraju sa $a \in G$ je podgrupa grupe G.

8. U grupi $(G, *)$ je definisana binarna relacija ρ na sledeći način:

$$a\rho b \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H,$$

gde je H podgrupa grupe G. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

9. Dokazati da je grupa $(\mathbb{R}, +)$ izomorfna grupi $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

2 Prsten i polje

2.1 Teorijski deo

Definicija 9. Algebarska struktura $(G, *, \circ)$ je prsten ako i samo ako zadovoljava sledeće uslove:

1) $(G, *)$ je Abelova grupa;

2) $(G, \circ)$ je polugrupa;

3) važi distributivni zakon $\circ$ prema $*$, tj. važi

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \quad \text{i} \quad (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z).$$

Definicija 10. Prsten $(G, *, \circ)$ takav da je $(G \setminus \{0\}, \circ)$ grupa (gde je 0 neutralni element grupe $(G, *)$) naziva se telo.

Definicija 11. Komutativno telo je polje.

Definicija 12. Neka je $(G, *, \circ)$ prsten i 0 neutral grupe $(G, *)$. Ako za x i $y \in G$ važi

$$x \circ y = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

tada su x i y delitelji nule.

2.2 Zadaci

1. Da li su sledeći skupovi sa naznačenim operacijama prsten, telo ili polje?

   a) $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$;

   b) $\Big(\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot\Big)$;

   c) $\Big(\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot\Big)$.

2. Dokazati da je struktura $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ prsten, gde su operacije $\oplus$ i $\odot$ definisane na sledeći način:

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}) \quad a \oplus b = a + b + 1, \quad a \odot b = ab + a + b.$$

3. Dokazati da je stuktura $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ prsten, gde su operacije $\oplus$ i $\odot$ definisane na sledeći način:

$$(\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2) \quad (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac, bd).$$

   Naći sve delitelje nule.